

8/3/21

Ελάχιστο πολυώνυμο

π.χ. $\mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$ | Ρίζες στον $\mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ δεν έχει ρίζες
 $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$ | Ρίζες στον $\mathbb{C} \Rightarrow x^2 + 1 = (x - i)(x + i) =$
 $= x^2 - i^2 = x^2 - (-1) = x^2 + 1$ ρίζες

Μatrix διαγωνοποιείται $\Leftrightarrow A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$ με Λ : Διαγώνιο πινάκo
 $\Leftrightarrow$ υπάρχει μια βάση του $\mathbb{R}^n$ από ιδιοδιανύσματα του A
 $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k) \Leftrightarrow$ πολλοί κάθε ιδιοτιμής =
 Διάστασης αντίστοιχου ιδιοχώρου

Ερώτημα? Μπορεί να οριστεί ρίζα ενός πινάκo $\sqrt{A}$, όπως ορίζεται στους αριθμούς?

~~$\sqrt{x}$~~ $\sqrt{4} = \pm 2$ $\exists \sqrt[n]{a} \quad \forall a \in \mathbb{R}$ 4 Ισους αριθμοί

Ας υποθέσουμε ότι ο A διαγωνοποιείται, $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$ με Λ : Διαγώνιο πινάκo

Πρόβλημα: Υπάρχει πινάκoς B ώστε $B^2 = A$ και Γ ώστε $\Gamma^3 = A$?
 Αν υπάρχουν θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο A έχει τον B σαν τετραγωνική ρίζα και τον Γ σαν τρίτη ρίζα.

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ Αν } \boxed{\lambda_i \geq 0} \text{ για } i=1, \dots, n \text{ τότε}$$

μπορούμε να ορίσουμε τον

$$B = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow$$

$$= P B^2 = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I_n} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$= P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}^2 \cdot P^{-1} = P \begin{pmatrix} (\sqrt{\lambda_1})^2 & & 0 \\ & (\sqrt{\lambda_2})^2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & (\sqrt{\lambda_n})^2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$= A$$

Προσοχή! Ο B δεν είναι μοναδιαίος!

$\rightarrow$ Ορίζουμε τον $\Gamma = P \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt[3]{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \sqrt[3]{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ έχω $\sqrt[3]{\lambda}$ οπότε δεν απαιτώ $\lambda \geq 0$

$$\Gamma^3 = P \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt[3]{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \sqrt[3]{\lambda_n} \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I_n} \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt[3]{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \sqrt[3]{\lambda_n} \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I_n} \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt[3]{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \sqrt[3]{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} =$$

$$= P \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt[3]{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \sqrt[3]{\lambda_n} \end{pmatrix}^3 P^{-1} = A$$

Π.χ. Να βρεθούν πίνακες B ώστε $B^2 = A$ με $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Λύση:

Εξετάζουμε αν ο A διαγωνοποιείται:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 + 4 = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3)$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3 \Rightarrow A$ διαγωνοποιείται

$v(0) = \langle 4, 2 \rangle, v(3) = \langle 2, 1 \rangle$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε τον $B = P \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ και τον $B' = P \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} P^{-1}$

Τότε: $A = B^2 = (B')^2$ αλλά $B \neq B'$

Ελάχιστο Πολυώνυμο

$M(n \times n, \mathbb{R})$ δ.χ., $\dim M(n \times n, \mathbb{R}) = n^2$

$\{A^0 = I, A^1, A^2, \dots, A^{n^2}\}$: αυτό έχει $n^2 + 1$ στοιχεία $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{I, A, A^2, \dots, A^{n^2}\}$ δεν είναι βάση και δεν είναι Γ.Α. Άρα αυτό το σύνολο είναι Γ.Ε. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists a_0, a_1, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_{n^2} A^{n^2} = O_{n \times n} \quad (\text{μηδενικό διάνυσμα του } M(n \times n, \mathbb{R}))$$

και όχι όλα μηδέν. Άρα $\exists m \leq n^2$ ώστε το:

$\{I, A, A^2, \dots, A^m, A^{m+1}\}$ να γίνει εξαρτημένο και το $\{I, A, \dots, A^m\}$ να γίνει εξ. ανεξίτητο

$$a_0 A^0 + a_1 A + \dots + a_m A^m + a_{m+1} A^{m+1} = O_{n \times n} \quad \mu \epsilon$$

$$a_{m+1} \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{1}{a_{m+1}} \Rightarrow \frac{a_0}{a_{m+1}} A^0 + \frac{a_1}{a_{m+1}} A + \dots + \frac{a_m}{a_{m+1}} A^m + A^{m+1} = O_{n \times n}$$

$\Rightarrow$ Δηλ. βρήκαμε ένα μονικό πολυώνυμο:

$$f_A(x) = \frac{a_0}{a_{m+1}} x^0 + \frac{a_1}{a_{m+1}} x + \dots + \frac{a_m}{a_{m+1}} x^m + x^{m+1} \quad \text{ώστε ο πίνακας } A$$

να είναι ρίζα του

Ορισμός: Για κάθε πίνακα A υπάρχει ένα μονικό πολυώνυμο $\mu_A(x)$ το οποίο να έχει ρίζα του πίνακα A , $\mu_A(A) = 0_{n \times n}$, και ο βαθμός του να είναι ελάχιστος.

Λήμμα: Το ελάχιστο πολυώνυμο $\mu_A(x)$ ενός πίνακα A διαιρεί κάθε άλλο πολυώνυμο $f(x)$ το οποίο έχει ρίζα του A . Δηλ. αν $f(A) = 0_{n \times n} \Rightarrow f(x) = \mu_A(x) \cdot g(x)$.

Απόδ:

$\mu_A(x)$ μονικό με τον μικρότερο βαθμό ^(*) ώστε: $\mu_A(A) = 0_{n \times n}$.

Έστω $f(x)$ πολυώνυμο ώστε $f(A) = 0_{n \times n}$. Διαγράφουμε το $f(x)$ με το $\mu_A(x) \Rightarrow f(x) = \mu_A(x)g(x) + u(x)$: Ευκλείδεια Διαίρεση.
 $u(x) = 0 \vee \deg u(x) < \deg \mu_A(x)$ ^(*)

• Αν $u(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \mu_A(x) \cdot g(x)$

• Αν $u(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) = \mu_A(x)g(x) + u(x) \Rightarrow f(A) = \mu_A(A)g(A) + u(A) \Rightarrow 0_{n \times n} = u(A)$, δηλ. το πολύμνο $u(x)$ έχει ρίζα του A .

Αδύνατο λόγω ^(*), ^(*)

Θεώρημα Cayley-Hamilton: Το χαρακτηριστικό πολύμνο $\chi_A(x)$ του πίνακα A έχει σαν ρίζα του τον A . Δηλαδή: $\chi_A(A) = 0_{n \times n}$. Άρα το ελάχιστο πολύμνο διαιρεί το χαρακτηριστικό πολύμνο του A . (χωρίς απόδειξη)

Πρόταση: Το χαρακτηριστικό $\chi_A(x)$ και το ελάχιστο $\mu_A(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες. Δηλ. οι ιδιοτιμές του A αποτελούν ρίζες του ελαχίστου πολύμνου.

Απόδ: Ας υποθέσουμε ότι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ διαμορφωμένες μεταξύ τους: $\chi_A(x) = \pm (x - \lambda_1)^{k_1} (x - \lambda_2)^{k_2} \dots (x - \lambda_k)^{k_k}$.
 $A \cdot u_i = \lambda_i \cdot u_i$ για $u_i \neq 0$ και $i = 1, \dots, k$. Τα u_i είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Ας υποθέσουμε ότι το ελάχιστο πολύμνο είναι το:

$$\mu_A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_\ell x^\ell$$

—D

$$w_A(\lambda_i) = a_0 + a_1 \lambda_i^2 + a_2 \lambda_i^3 + \dots + a_{l-1} \lambda_i^{l-1} + \lambda_i^l \Rightarrow$$

$$= b w_A(\lambda_i) u_i = a_0 u_i + a_1 \lambda_i u_i + a_2 \lambda_i^2 u_i + \dots + a_{l-1} \lambda_i^{l-1} u_i + \lambda_i^l u_i =$$

$$= a_0 u_i + a_1 A \cdot u_i + a_2 A^2 \cdot u_i + \dots + a_{l-1} A^{l-1} \cdot u_i + A^l \cdot u_i =$$

$$= (a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + A^l) u_i = \vec{0}$$

$$= w_A(A) = 0_{n \times n}$$

Σημ.

$$w_A(\lambda_i) \cdot u_i = \vec{0} \Rightarrow w_A(\lambda_i) = 0 \Rightarrow \lambda_i \text{ είναι ρίζα του ελαχ. πολυμ.}$$

Π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$

$$= (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ (πολιτα 2)} \\ \lambda_3 = \lambda_4 = 2 \quad -11-$$

Παρατηρούμε ότι $w_A(\lambda)$ διαφέρει το $\chi_A(\lambda)$ και έχουν τις ίδιες ρίζες τότε πιθανά ελαχίστα: $(1-\lambda)(2-\lambda)$, $(1-\lambda)^2(2-\lambda)$, $(1-\lambda)(2-\lambda)^2$, $(1-\lambda)^2(2-\lambda)^2 = \chi_A(\lambda)$ (Το ελαχ. πολυμ. πρέπει να είναι κοινό στα δύο βέβαια - δηλ. να έχω μονάδα στο μέγιστο όμοιο συντελεστή)

Εξετάζουμε ποιο αν' όλα αυτά είναι το $w_A(\lambda)$:

$$(I - A)(2I - A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \neq 0_{n \times n}$$

Άρα το $(1-\lambda)(2-\lambda)$ όχι $w_A(\lambda)$

$$(I-A)^2 (2I-A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ουκχι} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi_A(x) = -(1-x)^2(2-x)$$

Θεώρημα: Έστω $T: V^n \rightarrow V^n$ ενδομορφισμός και A ο πίνακας του T ως προς κάποια βάση. Ο A διαγωνοποιείται αν το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι γινόμενο διαμενόμενων πρωτοβάθμιων όρων:

$\chi_A(x) = \pm (x_1 - x)(x_2 - x) \dots (x_k - x)$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ είναι οι διαμενόμενες ιδιοτιμές του πίνακα A (χωρίς ανώδερση)

π.χ. Στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε ότι:

$\chi_A(x) = -(1-x)^2(2-x)$ δεν είναι $(1-x)(2-x)$ άρα ο A δεν διαγωνοποιείται

Πρόταση: Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο αντίστοιχα

Απόδ.: A, B όμοιοι $\Leftrightarrow A = S \cdot B \cdot S^{-1}$ (1) Γνωρίζουμε ότι:

$$\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda) \quad \text{Θέλουμε } \chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$$

$$\chi_A(A) = \text{Ουκχι} \quad (*) \Rightarrow a_0 I + a_1 A + \dots + a_{k-1} A^{k-1} + A^k = \text{Ουκχι} \quad (1)$$

$$\text{Υποθέτουμε ότι } \chi_A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + x^k \quad (*)$$

$$\Rightarrow a_0 S \cdot B \cdot S^{-1} + a_1 S B S^{-1} + \dots + S B^k S^{-1} = \text{Ουκχι} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S (a_0 I + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + B^k) S^{-1} = \text{Ουκχι} \Rightarrow S^{-1} S (\dots) S^{-1} S = \text{Ουκχι}$$

$$\Rightarrow a_0 I + a_1 B + \dots + B^k = \text{Ουκχι} \Rightarrow \chi_A(B) = \text{Ουκχι} \Rightarrow \chi_B(x) \text{ διαιρεί το } \chi_A(x)$$

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι $\chi_A(x)$ διαιρεί το $\chi_B(x)$ και το 2 είναι λανθάνον

Άρα: $\chi_A(x) = \chi_B(x)$